Chapitre 6

INTRODUCTION AUX TESTS STATISTIQUES.

1. NOTION DE TEST STATISTIQUE.

Définition : on appelle test statistique une démarche de la statistique inférentielle consistant :

- à contrôler la validité d'une hypothèse considérée comme vraie a priori, appelée hypothèse nulle et notée H_0 (présomption d'innocence d'un accusé) ;
- à admettre une hypothèse différente lorsque le contrôle se révèle négatif, appelée hypothèse alternative et notée H_1 *(culpabilité d'un accusé)*.

Définitions : on appelle :

- erreur de première espèce, l'erreur consistant à rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie *(on condamne un innocent) ;*
- erreur de seconde espèce, l'erreur consistant à accepter l'hypothèse nulle alors qu'elle est fausse *(on acquitte un coupable)*.

Définitions : on appelle :

- risque de première espèce la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie (erreur de première espèce). On le note α. C'est le risque qu'on limite *(risque de condamner un innocent)*.
- risque de seconde espèce la probabilité d'accepter l'hypothèse nulle quand elle est fausse (erreur de seconde espèce). On le note β. Il reste souvent inconnu *(risque d'acquitter un coupable)*.
- puissance la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle quand elle est fausse. On la note π et elle est égale à $1 - \beta$ (*probabilité de condamner un coupable*).

		Hypothèse vraie	
		H_0	H_1
Hypothèse acceptée	H_0	pas d'erreur	Erreur de $2^{\text{ième}}$ espèce Risque β
	H_1	Erreur de $1^{\text{ère}}$ espèce Risque α	pas d'erreur Puissance π

2 RÈGLE DE DÉCISION.

La décision est prise à l'issue d'observations statistiques *(ou d'investigations policières)* apportant ou non la preuve que l'hypothèse nulle est fausse *(que l'accusé n'est pas innocent)*.

L'acceptation de l'hypothèse nulle n signifie donc pas qu'elle est vraie, mais seulement que les données observées ne montrent pas qu'elle est fausse.

Exemple :

Un coefficient d'asymétrie très différent de 0 montre que la répartition des observations n'est pas symétrique.

Une grosse somme d'argent inexpliquée sur un compte courant peut être une preuve d'escroquerie.

Définition : dans un test statistique, la variable aléatoire que l'on utilise pour contrôler l'hypothèse nulle est appelée elle-même statistique.

Exemple : coefficient d'asymétrie *(solde d'un compte en banque)*

Définition : on appelle région critique d'un test statistique l'ensemble des valeurs observées de la statistique provoquant le rejet de l'hypothèse nulle.

Exemple : coefficient d'asymétrie supérieur à 0.534 pour 50 observations *(solde d'un compte en banque supérieur à la moyenne des soldes des mois précédents + deux fois l'écart-type)*

choix du risque α : Le risque α mesure la faiblesse de la preuve. Plus le risque est grand, plus la preuve est faible et inversement.

Il y a des valeurs classiques :

Risque de première espèce	hypothèse alternative
0.001 (0.1%)	quasiment impossible
0.01 (1%)	très peu vraisemblable
0.05 (5%)	peu vraisemblable
0.1 (10%)	rare mais possible

3. TESTS ÉLÉMENTAIRES.

Tests sur le coefficient d'asymétrie et d'aplatissement :

- hypothèse nulle H_0 : la loi de la v.a. est la loi normale ($\gamma_{as} = 0$ et $\gamma_{ap} = 3$).
- hypothèse alternative H_1 : la loi de X n'est pas la loi normale ($\gamma_{as} \neq 0$ ou $\gamma_{ap} \neq 3$).

Les intervalles en dehors desquels les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement observés dénient la normalité de la répartition sont donnés dans une table statistique.

Pour n = 50 observations et $\alpha = 0.05$:

Coefficient d'asymétrie c_{as} très différent de 0 : on rejette l'hypothèse nulle.

$$RC =]-\infty, -0.534[\cup]0.534, +\infty[$$
$$P[\{c_{as} < -0.534\} \cup \{c_{as} > 0.534\} / H_0) = 0.05$$

Coefficient d'aplatissement c_{ap} très différent de 3 : on rejette l'hypothèse nulle.

$$RC =]0, 2.15[\cup]3.99, +\infty[$$
$$P[\{c_{ap} < 2.15\} \cup \{c_{a}s > 3.99\} / H_0) = 0.05$$

4. DISCUSSION. GÉNÉRALISATION.

On a observé des traces de pas sur une plage, et on a pu en déduire la pointure de la personne qui est passée. On sait que cette personne s'appelle Dominique.

- H_0 : Dominique est une femme
- H_1 : Dominique est un homme

• Statistique : pointure.

Décision intuitive :
1ère observation : Dominique chausse du 43.

Peu de femmes chaussant du 43, on peut considérer que Dominique est un homme.
2ième observation : Dominique chausse du 39.

La pointure 39 est fréquente chez les femmes ; Dominique peut être une femme.

Décision statistique :

La décision est prise suivant les probabilités calculées sous l'hypothèse nulle, c'est-à-dire chez les femmes. On sait qu'il y a 7% de femmes chaussant du 41 ou plus. La région critique et le risque de première espèce sont donc :

$$RC = [41, +\infty [$$
$$P(RC / H_0) = 0.07$$

Critique du raisonnement :

La décision prise est discutable. Plusieurs hypothèses ont été émises implicitement sur la population constituée des promeneurs sur la plage.

- il n'y a que des adultes, pas d'enfant.
- il y a autant d'hommes que de femmes : le pourcentage de 7% ne tient pas compte de la proportion de femmes se promenant sur la plage.
- le raisonnement intuitif conduirait à rejeter l'hypothèse que Dominique est un homme s'il chausse du 45, puisque 3.33% seulement d'hommes chaussent du 45 ou plus. De même, il est rare qu'une femme chausse du 35 ou moins (6.7%).La décision est pourtant évidente dans chaque cas, et doit être prise en comparant la vraisemblance des hypothèses dans chaque cas, c'est-à-dire le pourcentage d'homme chaussant au moins du 45 (ou au plus du 35) au pourcentage de femmes correspondant : c'est le *rapport des vraisemblances* qui permet de prendre la décision.

Pour la pointure 45, il y a 0.1% de femmes chaussant du 45 ou plus, contre 3.3% d'hommes : la vraisemblance que ce soit un homme est donc largement supérieure.

Pour la pointure 35, il y a 0.01% d'hommes chaussant du 35 ou moins contre 6.7% de femmes : la vraisemblance que ce soit une femme est donc largement supérieure.

Conclusion : méfions-nous des raisonnements hâtifs.